Probabilité (Niveau 4 - Objectif ESSEC - HEC)

L'objectif du problème est d'étudier les rudiments de la théorie de la communication - ou théorie de l'information - introduite en 1948 par Claude Shannon.

Définitions et notations

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
φ est la fonction définie sur $]0,1]$ par $x \mapsto \varphi(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
Pour un événement A de probabilité non nulle, on pose $i(A) = \varphi(P(A))$.
h est la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$h(0) = 0 \qquad \text{et pour } x \in]0,1], \quad h(x) = -x\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

Pour une variable aléatoire X discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles, on pose sous réserve d'existence :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$$

Si X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, alors $H(X)$ existe et, en notant $p_k = P(X = x_k)$, on a :

$$H(X) = \sum_{k=1}^{n} h(P(X = x_k)) = \sum_{k=1}^{n} h(p_k)$$

Remarque : En théorie de l'information, $i(A)$ est appelé incertitude de l'événement A et $H(X)$ est l'incertitude moyenne - ou entropie - de X.

Partie I : Incertitude des événements

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
   Soit A l'événement " la carte tirée est la dame de cœur ".
   Que valent $P(A)$ et $i(A)$?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce équilibrée.
   A est l'événement " obtenir n fois PILE ". Préciser $i(A)$.
3. Vérifier les points suivants :

   (i) Pour un événement Ω' quasi-certain : $i(\Omega') = 0$.
   (ii) Si A et l'événement contraire $\overline{A}$ sont équiprobables, alors $i(A) = 1$.
   (iii) Si A et B sont indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$, alors $i(A \cap B) = i(A) + i($

4. Préciser $i(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$ quand les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants et $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.
   En déduire une nouvelle démonstration de la question 2.
5. Soit A et B deux événements tels que $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Comparer $i(A)$ et $i(B)$.
6. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$ et quelle interprétation peut-on donner de ce résultat ?

Partie II : Incertitude d'une variable aléatoire discrète

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si U_n suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$, que vaut $H(U_n)$?
2. Si on suppose $P(Z = 1) = 1/4$, $P(Z = 2) = 1/4$ et $P(Z = 3) = 1/2$, que vaut $H(Z)$?
   Comparer $H(Z)$ et $H(U_3)$.
3. On se propose de simuler informatiquement une variable aléatoire. On rappelle que **(grand(1,1,'uin',1,j)** fournit au hasard un nombre élément de $[\![1, j]\!]$.

   ```
   function y = Essec()
       ini = (grand(1,1,'uin',1,3)
       if ini == 3 thend
           y = (grand(1,1,'uin',1,2)
       else
           y = 3
       end
   endfunction
   ```

   On appelle Y le contenu de y après exécution du programme Essec.
   Donner la loi de Y, calculer son espérance $E(Y)$ et son incertitude $H(Y)$.
4. Vérifier que h est continue et positive sur $[0, 1]$.
   Est-elle dérivable en 0 ? Étudier h et dessiner sa courbe représentative .
5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.
   Montrer que $H(X) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, X est quasi-certaine.